

各種高精度 FDTD 法の数値分散特性及び安定条件

Comparison of Several High Accuracy FDTD Methods Based on Numerical Dispersion and Stability Condition

千藤 雄樹 片山 浩己 柏 達也 大谷 忠生†
 Yuuki SENDO Hiroki KATAYAMA Tatsuya KASHIWA Tadao OHTANI
 北見工業大学 三菱重工業株式会社†
 Kitami Institute of Technology Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.

1. はじめに

近年の計算機の高速大容量化により FDTD 法を用いた光素子や大型空洞系及び室内電波伝搬等の電磁場の大規模計算が可能となっている。しかし、波長に比べて大きな系の FDTD 解析では数値分散により大きな位相誤差が生じるため、数値計算上非常に大きな問題となる。

FDTD 法における位相誤差を縮小するために種々の高精度 FDTD 法が考案されている。それ故、実際の解析での適切な使い分けのためには各手法の特性を比較検討することが重要である。本報告では、高精度 FDTD 法である光速度補正 FDTD 法、FDTD(2,4)法、Non-standard FDTD(NS-FDTD)法を取り挙げ、それらの数値分散特性及び安定条件について比較検討した[1]-[6]。

2. 各種差分法の数値分散式及び安定条件

以下に、本報告において新たに導出、或いは統一的記述で整理した各手法における位相誤差の周波数特性を表す式即ち数値分散式及び安定条件を示す。

2.1 光速度補正 FDTD 法

FDTD 法は時間及び空間について 2 次の精度である。光速度補正 FDTD 法の数値分散特性は式(1)で表される。

$$c_n^2 = c_0^4 \left\{ \frac{\gamma_{rx}^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) + \frac{\gamma_{ry}^2}{\Delta y^2} \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) + \frac{\gamma_{rz}^2}{\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \right\} \frac{\Delta^2}{\sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)} \quad (1)$$

但し、 c_n は数値的光速度、 c_0 は物理的光速度、 ω は角周波数、 k は波数である。また、 v_{rx} 、 v_{ry} 、 v_{rz} は各座標軸方向に対する光速度補正比率である。なお本手法は特定の周波数を中心に高精度化を行う手法である。 $k_x = k \sin \theta \cos \phi$ 、 $k_y = k \sin \theta \sin \phi$ 、 $k_z = k \cos \theta$ である。ここで、 $v_{rx} = v_{ry} = v_{rz} = 1$ とすると、FDTD 法の場合の式となる。本手法の安定条件は式(2)で表される。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\gamma_{rx}^2 / \Delta x^2 + \gamma_{ry}^2 / \Delta y^2 + \gamma_{rz}^2 / \Delta z^2}} \quad (2)$$

2.2 FDTD(2,4)法

FDTD(2,4)法には標準的 FDTD(2,4)法、光速度補正 FDTD(2,4)法及び差分係数補正 FDTD(2,4)法がある。FDTD(2,4)法は時間について 2 次、空間について 4 次の精度である。各種 FDTD(2,4)法の数値分散特性は式(3)で表される。

$$c_n^2 = c_0^4 \left\{ \frac{\gamma_{rx}^2}{\Delta x^2} \left[k_x \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) - \frac{k_2}{3} \sin^2\left(\frac{3k_x \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \frac{\gamma_{ry}^2}{\Delta y^2} \left[k_y \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) - \frac{k_2}{3} \sin^2\left(\frac{3k_y \Delta y}{2}\right) \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{\gamma_{rz}^2}{\Delta z^2} \left[k_z \sin^2\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) - \frac{k_2}{3} \sin^2\left(\frac{3k_z \Delta z}{2}\right) \right]^2 \right\} \frac{\Delta^2}{\sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)} \quad (3)$$

各種 FDTD(2,4)法の安定条件は式(4)で表される。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\gamma_{rx}^2 / \Delta x^2 + \gamma_{ry}^2 / \Delta y^2 + \gamma_{rz}^2 / \Delta z^2}} \times \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + 1/9 k_2^2 + 2/3 k_1 k_2}} \quad (4)$$

ここで、各節点における重み係数 $k_1=9/8$ 、 $k_2=1/8$ 、 $k_3=0$ とした時、光速度補正 FDTD(2,4)法の場合の式を示す。更に各座標軸方向に対する光速度補正比率を $v_{rx}=v_{ry}=v_{rz}=1$ とした時、通常の FDTD(2,4)法の場合の式となる。また、 $v_{rx}=v_{ry}=v_{rz}=1$ の時 k_1 、 k_2 に自由度を持たせ設定周波数における位相誤差を最小化させる事を考える。本報告ではこの方法を差分係数補正 FDTD(2,4)法と称しその特性も調べる。

2.4 NS-FDTD 法

本手法は特定の周波数を中心に高精度化を行う解析法である。また、時間及び空間について 2 次の精度を有している。本報告では補正周波数と使用周波数が異なる場合の位相誤差を表す数値分散式を導出した。数値分散特性は下式(5)で表される。

$$c_n^2 = c_0^4 \left[\left\{ \alpha_{\xi 1}(\omega) + \alpha_{\xi 2}(\omega) \cos^2(k_\xi \Delta \xi) + \frac{\alpha_{\xi 3}(\omega)}{2} (\cos^2(k_\xi \Delta \xi) + \cos^2(k_\xi \Delta \xi)) \right\} \frac{\sin^2\left(\frac{k_\xi \Delta \xi}{2}\right)}{S_\xi^2(\Delta \xi)} \right. \\ \left. + \left\{ \alpha_{\eta 1}(\omega) + \alpha_{\eta 2}(\omega) \cos^2(k_\eta \Delta \eta) + \frac{\alpha_{\eta 3}(\omega)}{2} (\cos^2(k_\eta \Delta \eta) + \cos^2(k_\eta \Delta \eta)) \right\} \frac{\sin^2\left(\frac{k_\eta \Delta \eta}{2}\right)}{S_\eta^2(\Delta \eta)} \right. \\ \left. + \left\{ \alpha_{\zeta 1}(\omega) + \alpha_{\zeta 2}(\omega) \cos^2(k_\zeta \Delta \zeta) + \frac{\alpha_{\zeta 3}(\omega)}{2} (\cos^2(k_\zeta \Delta \zeta) + \cos^2(k_\zeta \Delta \zeta)) \right\} \frac{\sin^2\left(\frac{k_\zeta \Delta \zeta}{2}\right)}{S_\zeta^2(\Delta \zeta)} \right] \\ \times \frac{S_\omega^2(\Delta t)}{\sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)} \quad (5)$$

ここで、 $\alpha_{\xi 1}$ 、 $\alpha_{\xi 2}$ 及び $\alpha_{\xi 3}$ は 1 階差分演算子に対する最適化パラメータである。なお、 $\xi=x, y, z$ である。 S_k 及び S_ω は修正関数である。 ω_α 及び ω_c は差分演算子の重み係数 α 及び修正関数 S における角周波数の設定値である。 $k_\xi = \omega_c / c_0$ であり、 k 及び ω は使用周波数における波数及び角周波数である。安定条件は式(6)で表される。

$$S_\omega(\Delta t) \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{1/S_\xi^2(\Delta x) + 1/S_\eta^2(\Delta y) + 1/S_\zeta^2(\Delta z)}} \quad (6)$$

なお、立方格子に近い場合には FDTD 法に比べ大きな安定条件を得ることが出来る。

3. 各種 FDTD 法の特性

ここでは矩形格子の場合について数値分散特性を調べた。格子軸比については $\Delta x : \Delta y : \Delta z = 1/20 : 1/15 : 1/10$ とした。図 1 から図 6 に各手法の数値的光速度の位相誤差特性を示し、設定周波数で最適化が可能な手法については各周波数での特性についても示した。光速度補正 FDTD 法は簡便な手法であり、設定周波数で位相誤差をある程度縮小することが可能であるが狭帯域である。FDTD(2,4)法は安定条件が FDTD 法の 6/7 であり、また、1 節点あたりの計算量が増加する。しかし、FDTD 法及び光速度補正 FDTD 法より広い帯域に渡り高精度な解析が可能である。

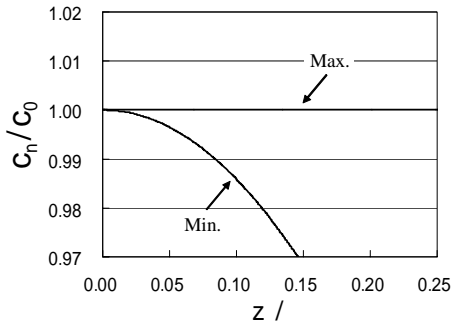


図1 FDTD法の数値的光速度

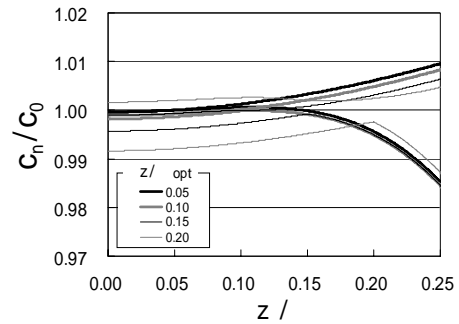


図4 光速度補正 FDTD(2,4)法の数値的光速度

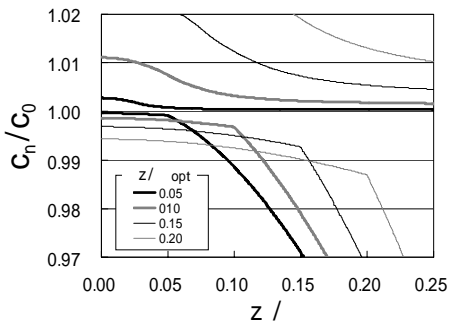


図2 光速度補正 FDTD 法の数値的光速度

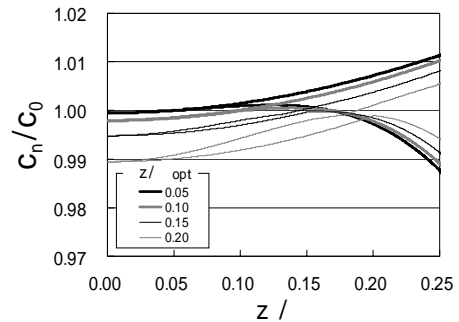


図5 差分係数補正 FDTD(2,4)法の数値的光速度

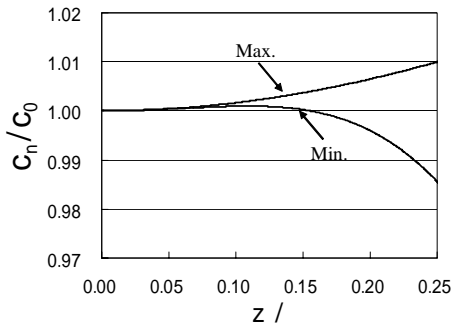


図3 FDTD(2,4)法の数値的光速度

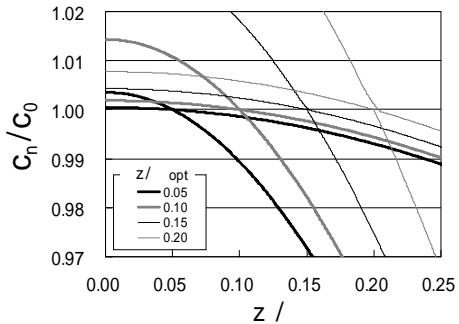


図6 NS-FDTD法の数値的光速度

光速度補正 FDTD(2,4)法は、設定周波数において位相誤差をかなり縮小することが可能である。しかし、設定周波数より低い周波数で FDTD(2,4)法の場合より誤差が増大する。差分係数補正 FDTD(2,4)法は光速度補正 FDTD(2,4)法に比べ設定周波数において更に高精度な解析を行う事が可能である。しかし、低い周波数で光速度補正 FDTD(2,4)法よりも誤差が拡大する。また、 k_1 、 k_2 の最適値は数値的に求める必要がある。NS-FDTD法は1節点あたりの計算量が増加する。しかし、上記の各手法に比べ設定周波数における位相誤差が極めて小さく、安定条件が FDTD法と同等以上であるため大規模伝搬解析においては有利である。更に、最適化のためのパラメータが解析的に導出できる。

5. むすび

本報告では、各種高精度 FDTD法での位相誤差特性及び安定条件の比較検討を行った。その結果、狭帯域での簡便な解析には光速度補正 FDTD法、広帯域な解析には FDTD(2,4)法、狭帯域での高精度な解析には NS-FDTD法がそれぞれ適していると考えられる。特に、graded mesh等を用いた解析においては係数計算に相当の労力を要する。実際の伝搬解析においては、伝搬空間においては格子間隔を大きくすることが可能な高精度 FDTD法を用い、送受信部等の微細形状のモデリングには subgrid法[7]を用いることにより高速かつ高精度な解析が可能となる。

参考文献

- [1] 千藤、工藤、柏、大谷, "Non-Standard FDTD法における磁界の位相誤差について," IEICE Trans. vol. J84-C, no.8, pp.707-709, Aug. 2001.
- [2] T.Kashiwa, H.Kudo, Y.Sendo, T.Ohtani, and Y.Kanai, "Phase velocity error and the stability condition of the three dimensional non-standard FDTD method," IEEE Trans. Magnetics, vol.38, no.2, Mar. 2002.
- [3] 千藤、工藤、柏、大谷, "音響 Non-Standard FDTD法の位相誤差について," IEICE Trans. Vol. J85-A, No.3, Mar. 2002.
- [4] 千藤、工藤、柏、大谷, "各種高精度 FDTD法の数値分散特性及び安定条件の比較検討," IEICE Trans. (投稿中)
- [5] 千藤、工藤、柏、大谷, "大型構造体の高精度3次元音場解析のための FDTD(2,4)法," IEICE Trans. (投稿中)
- [6] 大谷、千藤、柏, "損失媒質中の Non-Standard FDTD法," IEICE Trans. (投稿中)
- [7] 千藤、柏, "FDTD解析における subgrid技術について," 第5回電子情報通信学会北海道支部インターネットシンポジウム, pp. 1-8, Feb. 2001.